

Fundamentos de Probabilidad  
en  
**BIOESTADISTICA**

G. Alonso  
J. Ocaña  
C.M. Cuadras

2ª EDICION

A decorative graphic at the bottom of the cover features a series of vertical bars of varying heights, each filled with a pattern of white dots. A thick, solid black wavy line curves across the top of these bars, starting from the left edge and ending at the right edge. The bars are set against a light background.

LABORATORIO DE CALCULO  
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

**PUBLICACIONES DEL LABORATORIO DE CALCULO  
UNIVERSIDAD DE BARCELONA**

**Nº 16**

**FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD  
EN  
BIOESTADISTICA**

**(2ª EDICION)**

**G. ALONSO RODRIGUEZ**

LICENCIADO EN CIENCIAS BIOLOGICAS

**J. OCAÑA REBULL**

LICENCIADO EN CIENCIAS BIOLOGICAS

**C. M. CUADRAS AVELLANA**

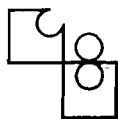
DOCTOR CIENCIAS MATEMATICAS

PROFESORES DE BIOESTADISTICA

FACULTAD DE BIOLOGIA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Barcelona, Enero 1979



**EUNIBAR**

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BARCELONA

Diputación, 216

BARCELONA-11 (España)

### OTROS TITULOS DE INTERES:

Nº 15 — Elementos de Cálculo Numérico;

S. Manrique y M. Petit

Nº 17 — Ejercicios de Bioestadística;

C.M. Cuadras, P. Sánchez,

L. Ocaña y G. Alonso

Nº 18 — Problemas de Probabilidades y Estadísticas

C.M. Cuadras Avellana

Nº 19 — Lenguaje de Programación BASIC;

J. Astor Vignau

Nº 20 — Lenguaje de Programación Fortran IV;

J. Astor Vignau

### FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD EN BIOESTADISTICA

G. ALONSO RODRIGUEZ, J. OCAÑA REBULL,  
C.M. CUADRAS AVELLANA

© Autores: G. Alonso Rodríguez, J. Ocaña Rebull y C.M. Cuadras Avellana  
Diseño portada: M<sup>a</sup> Carmen Berbel y M. Angel Campos  
Dibujos: M<sup>a</sup> Carmen Berbel  
Coord. Publicaciones: Jesús Garriga Reverter  
Editorial: LABORATORIO DE CALCULO. Universidad de Barcelona  
Avda. José Antonio, 585 - Barcelona, España  
EUNIBAR - Editorial Universitaria de Barcelona  
Calle Diputación, 216 - Barcelona-11  
Imprime: ROMARGRAF, S.A.  
Juventud, 55-57  
Hospitalet de Llobregat (Barcelona)  
Depósito Legal: B. 25509-1976  
ISBN: 84-600-0506-02

# INDICE

## 1 PRELIMINARES

Introducción	1
Historia de la Teoría de la Probabilidad	1

## 2 ALGEBRAS DE SUCESOS Y PROBABILIDAD

Algebras de sucesos-álgebras de Boole	8
Definición	8
Probabilidad sobre un álgebra	13
Espacio de probabilidad	16
Generación de álgebras	18
Algebras finitas	19
Algebras no finitas	25
Isometría de Espacios de probabilidad	26
Ejemplos	28

## 3 INDEPENDENCIA ESTOCASTICA. TEOREMA DE BAYES

Introducción	44
Espacio de probabilidad condicionado	45
Espacio de probabilidad condicionado general	48
Independencia estocástica	49
Teorema de las probabilidades totales	53
Teorema de Bayes	54
Producto cartesiano de espacios de probabilidad	55
Ejemplos	62

## 4 VARIABLES ALEATORIAS Y FUNCIONES DE DISTRIBUCION

Definición de variable aleatoria	74
Operaciones sobre el conjunto de variables aleatorias	77
Función de distribución de probabilidad	79
Indicadores	83
Espacio vectorial de las variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad finito	83
Ejemplos	86

## 5 DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

Distribuciones de probabilidad discretas	95
Distribuciones de probabilidad continuas	97

Descomposición de la función de distribución	100
Distribución de una función de variable aleatoria	101
Ejemplos	103
<b>6 DISTRIBUCIONES BIVARIANTES Y MULTIVARIANTES</b>	
Distribuciones de probabilidad bidimensionales	109
Distribución conjunta bivariable discreta	112
Distribución conjunta bivariable absolutamente continua	113
Distribuciones marginales	116
Independencia estocástica de variables aleatorias	120
Distribuciones condicionadas	122
Generalización: distribución de probabilidad de $n$ variables aleatorias	127
Cambio de variables en el caso $n$ -dimensional	132
Ejemplos	135
<b>7 ESPERANZA MATEMATICA</b>	
Definición de esperanza matemática	148
Propiedades de la esperanza matemática	150
Varianza	154
Teorema de Tchebychev	157
Ejemplos	159
<b>8 MOMENTOS</b>	
Momentos de una variable aleatoria	168
Momentos de dos variables aleatorias	171
Desigualdad de Schwarz	173
Coefficiente de correlación	174
<b>9 FUNCION CARACTERISTICA</b>	
Definición	177
Suma de variables independientes	179
Generación de momentos	180
Fórmula de la reciprocidad de Fourier	181
Convergencia de funciones características	182
Función característica de variables aleatorias multi dimensionales	183
<b>10 CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD. LEYES DE LOS GRANDES NUMEROS</b>	
Sucesiones de variables aleatorias	185
Leyes de los grandes números	187
Convergencia en ley	194

## 11 MEDIDAS DE POSICION, DISPERSION Y ASIMETRIA

Medidas de posición	196
Medidas de deformación y exceso	203
Ejemplos	205

## 12 DISTRIBUCION BINOMIAL. OTRAS DISTRIBUCIONES

Distribución de Bernouilli	218
Distribución binomial	219
Distribución multinomial	226
Distribución hipergeométrica	229
Distribución de Pascal o geométrica	230
Distribución uniforme	232
Distribución de Cauchy	233
Distribución exponencial	234
Distribuciones beta y gamma	237
Ejemplos	241

## 13 DISTRIBUCION DE POISSON

Distribución de Poisson	253
Propiedades	255
Relación con otras distribuciones	259
Distribuciones de Poisson compuestas	261
Ejemplos	266

## 14 DISTRIBUCION NORMAL. TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

Definición y propiedades	275
La normal reducida. Manejo de las tablas	278
Aproximación de la binomial a la normal. Teorema de Laplace-De Moivre	280
Teorema central del límite	281
Aplicaciones biológicas	291
Relación entre las distribuciones estudiadas. Transformaciones normalizantes	293
Ejemplos	296

## 15 REGRESION Y CORRELACION ENTRE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Ajuste lineal mínimo-cuadrático	313
Rectas y coeficientes de regresión	315
Coefficiente de correlación	322
Regresión no lineal	328
La covarianza como producto escalar. Interpretación geométrica de la correlación	335
Ejemplos	341

## 16 REGRESION Y CORRELACION EN N VARIABLES

Parámetros de la distribución conjunta de n variables - aleatorias	360
Hiperplanos y coeficientes de regresión	362
Coefficiente de correlación múltiple	364
Varianza residual	366
Correlación parcial	366
Ejemplos	369

## 17 DISTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA NORMAL

Distribución normal bivalente	384
Distribución ji-cuadrado	388
Distribución t de Student	392
Distribución de Fisher-Snedecor <b>F</b>	394
El sistema Pearson	396

TABLAS	399
--------	-----

INDICE DE NOTACIONES, SIMBOLOS Y ABREVIATURAS	405
---	-----

INDICE DE PROGRAMAS	410
---------------------	-----

BIBLIOGRAFIA	413
--------------	-----

INDICE ALFABETICO DE AUTORES Y CONCEPTOS	418
--	-----

-----

## INDICE ALFABETICO DE AUTORES Y CONCEPTOS

=====

### A

**ABSOLUTAMENTE CONTINUA**  
 Distribución, 98, 100  
 Distribución conjunta bivariable, 113  
 Distribución marginal, 119  
 Función de distribución, 79, 100  
 Función de densidad, 98  
 Función de densidad conjunta - bivariable, 115  
 Función de distribución conjunta bivariable, 115  
**AGREGACION**  
 Índice de, 263  
**AJUSTE LINEAL MINIMO-CUADRATICO**, 314  
**ANGULAR**  
 Transformación, 294  
**ALEATORIA**  
 Variable, 76  
**ALGEBRA**  
 condicionada, 46  
 de Boole, 10  
 de conjuntos, 11  
 de sucesos, 10  
 engendrada, 18  
 Estructura atómica de, 19  
 finita, 19  
 generada, 18  
 inducida, 75  
 no finita, 15  
 Sigma-, 18  
 de Borel en  $R$ , 74  
 de Borel en  $R^2$ , 109  
**ALGEBRAS**  
 Estocásticamente independientes, 53  
 Producto cartesiano de, 55  
 Producto exterior de, 56  
**ALLEN, G.E.**, 4  
**ALOMETRICA**  
 función, 106  
**APROXIMACION DE LA BINOMIAL A - LA NORMAL**, 280, 293  
**APROXIMACION DE LA BINOMIAL A - LA POISSON**, 254, 293  
**APUNTAMIENTO O KURTOSIS**  
 Coeficiente de, 203  
**ARBOL PROBABILISTICO**, 61, 73  
**ARCO SENO**  
 Transformación, 294

**ASIMETRIA**  
 Coeficiente de, 202  
**ASINTOTICAMENTE NORMAL**, 284,  
**ATOMO**, 19  
**AZAR**,  
 1° ley empírica del, 2  
 2° ley empírica del, 193

### B

**BAKER, J.J.W.**, 4  
**BARTLETT**, 295  
**BAYES**  
 Teorema de, 54  
**BEIRAS**, 64  
**BENZECRI**, 61  
**BERNOUILLI**, 3  
 Distribución de, 218, 225,  
 Teorema de, 189  
**BERNSTEIN**  
 Teorema de, 190  
**BETA**  
 Distribución, 237  
**BIMODAL**  
 Distribución, 199  
**BINOMIAL**  
 Distribución, 219  
**BINOMIAL NEGATIVA**  
 Distribución, 263  
**BOREL**, 3  
 Función medible-, 101  
 Sigma-álgebra de, 74  
**BORELIANO**,  
 de  $R$ , 74  
 de  $R^2$ , 109

### C

**CAMBIO DE VARIABLE**, 101  
 en el caso  $n$ -dimensional,  
**CARACTERISTICA**  
 Función, 178  
**CASOS POSIBLES**  
 Conjunto de, 8  
**CAUCHY**  
 Distribución, 233  
**CENTRADA**,  
 Variable aleatoria, 154  
**CENTRAL DEL LIMITE**  
 Teorema, 281, 284

**CENTRALES**

- Momentos, 169
- CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA DISTRIBUCION CONJUNTA, 360
- CILINDRO, 56
- CHING CHUN LI, 295
- CODIGO GENETICO, 68, 271
- COLECTIVO, 5
- COLQUHOUN, 267
- COMPLEJA
  - Variable aleatoria, 177
- CONDICIONADA
  - Distribución, 122, 132
  - Probabilidad, 46
- CONJUNTO CILINDRICO, 56
- CONTINUA
  - Variable aleatoria, 97
- CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD, 186
  - en ley, 194
- CONVOLUCION, 281
- CORRELACION
  - Coefficiente de, 174, 322
  - Razón de, 333
  - múltiple, 364,
  - parcial, 366
- CORRELACIONES
  - Matriz de, 370
- COVARIANZAS, 172
  - Como producto escalar, 336
- CRAMER, 290, 397
- CUANTILES, 202
- CUANTOS
  - de acetilcolina, modelo de la liberación de , 267
- CUARTILES, 202

**D**

- DECILES, 202
- DEFORMACION Y EXCESO
  - medidas de, 203
- DE MOIVRE, 280
- DENSIDAD
  - función de, 95, 98
- DENSIDAD CONJUNTA
  - función de, 112
- DEPENDENCIA ESTOCASTICA, 49
- DESVIACION TIPICA, 200, 155
- DETERMINACION,
  - coeficiente de, 314
- DISCRETA
  - distribución marginal, 117
  - Función de densidad, 95
  - Función de densidad conjunta bivariable, 112, 98

- Función de distribución, 95, 100
- Función de distribución conjunta - bivariable, 113
- Variable aleatoria, 95
- DISPERSION
  - Medidas de, 200
- DISTANCIA GENETICA, 321
- DISTANCIA MEDIA MINIMO-CUADRATICA, 323
- DISTRIBUCION
  - absolutamente continua, 98, 100
  - Descomposición de la función de, 100
  - Función de, 100, 79
- DISTRIBUCIONES CONDICIONADAS, 122, 132
- DISTRIBUCION CONJUNTA
  - bivariable absolutamente continua, 113
  - bivariable continua, 113
  - de n variables aleatorias, 127
  - discreta, 112
- PROYECCION DE, 116
- DISTRIBUCION MARGINAL
  - absolutamente continua, 119
  - discreta, 117
  - Función de, 116
- DESIGUALDAD DE SCHWARZ, 173, 337

**E**

- EDGEWORTH, 290
- ELECTROFORESIS,
  - diferencias génicas entre especies, 266
- ELIPSE DE CONCENTRACION, 325
- ERROR TIPICO, 321
- ESPACIO DE PROBABILIDAD, 16
  - condicionado, 47
  - producto, 59
- ESPACIO MEDIBLE, 15, 74
  - producto, 57
- ESPERANZA CONDICIONADA, 230
- ESPERANZA MATEMATICA,
  - de una función de dos variables aleatorias, 151
  - de una variable absolutamente continua, 149
  - de una variable discreta, 149
  - Linealidad de la, 152
- ESTADISTICA
  - descriptiva, 3
  - matemática, 3
  - Regularidad, 3
- ESTADO ENERGETICO DE UN SISTEMA, 231
- ESTOCASTICA
  - Dependencia, 49
  - Independencia, 49

ESTRUCTURA  
Teorema de, 20  
EXCESO  
Coeficiente, 204  
EXPERIENCIAS  
dependientes, 58  
independientes, 58  
EXPONENCIAL  
Distribución, 234  
Distribución bivariente, 140  
EXTINCION DE ORDENES DE REPTILES  
EN EL CRETACICO, 269

**F**

**F** DE FISHER-SNEDECOR  
Distribución, 394  
FENOMENO  
aleatorio, 4, 5  
determinista, 6  
estocástico, 4, 5  
FOURIER  
Fórmula de reciprocidad de, 181  
FRECUENCIA  
absoluta, 2, 220  
acumulativa, 311, 312  
discreta, 3  
relativa (distribución), 224  
FRETCHET, 7  
FUNCION  
característica, 178  
de densidad absolutamente con  
tinua, 98  
de densidad condicionada abso  
lutamente continua, 123  
de densidad condicionada dis  
creta, 125  
de densidad conjunta bivaria-  
ble absolutamente continua,  
113  
de densidad conjunta bivaria-  
ble discreta, 110  
de densidad discreta, 95  
de distribución, 79, 100  
de distribución absolutamente  
continua, 98  
de distribución condicionada  
absolutamente continua, 125  
de distribución condicionada  
discreta, 124  
de distribución conjunta bi-  
variable absolutamente con  
tinua, 113  
de distribución conjunta bi-  
variable discreta, 112

de distribución discreta, 95, 100  
medible, 74  
medible-Borel, 101

**G**

GAMMA  
Distribución, 237  
GAMOW, 271  
GAUSIANOS  
Procedimientos, 292  
GAUSS  
Campana de, 276  
GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS, 303  
GEOMETRICA (O DE PASCAL)  
Distribución, 230  
GRADOS DE LIBERTAD  
(Distribución ji-cuadrado), 390  
(Distribución de student), 392  
GRAM-CHARLIER, 290  
GREENWOOD, 263  
GUIAŞU, 68

**H**

HARDING, 307  
HIPERBOLICA  
Regresión, 322  
HIPERGEOMETRICA  
Distribución, 229  
HIPERPLANO  
de regresión, 362  
HISTOGRAMA, 305, 310

**I**

INCORRELACIONADAS  
Variables aleatorias, 176  
INDEPENDENCIA ESTOCASTICA  
de sucesos, 49  
de variables aleatorias, 120, 127  
INDEPENDIENTES  
Algebras estocásticamente, 52  
Experiencias, 58  
Ternas de sucesos, 51  
INDUCIDA  
Algebra, 75  
Probabilidad, 76  
INDICADOR, 83  
INFECCIOSO  
Proceso, 218  
INTERVALOS DE CONFIANZA  
Tabla de la normal para, 278  
INFERENCIA ESTADISTICA, 291  
ISOMETRIA DE ESPACIOS DE PROBABILIDAD, 27

**J**

JI-CUADRADO  
Distribución, 388

**K**

KHINTCHINE  
Teorema de, 189  
KOLMOGOROV  
Axiomática de, 6  
KOLMOGOROV-SMIRNOV  
Test de, 307

**L**

LAPLACE, 284  
LAPLACE-DE MOIVRE  
Teorema de, 280  
LAPLACE-GAUSS  
Distribución de, 275  
LEBESGUE, 204  
LEPTOCURTICAS  
Distribuciones, 192  
LEY  
Convergencia en, 194  
LEY DE LA MEDIA, 187  
LEY EMPIRICA DEL AZAR  
Primera, 2  
segunda, 193  
LEYES DE LOS GRANDES NUMEROS,  
187  
LIAPOUNOFF  
Teorema de, 284, 285  
LINDBERBERG y LEVY  
Teorema de, 285  
LOGARITMICA  
Transformación, 394  
LOGARITMICO NORMAL (LOG-NORMAL)  
distribución, 289

**M**

MARGINAL  
absolutamente continua, 119  
discreta, 117  
Función de distribución, 117  
MATRIZ  
de varianzas-covarianzas, 361  
de correlaciones, 361  
MEDIA  
Curva de regresión de la, 329  
Ley de la, 187  
MEDIANA, 197  
MEDIBLE,  
Espacio, 15, 74

Función, 74  
MEDIBLE-BOREL  
Función, 101  
MEDIO  
Valor, 149  
MEJORIA DE PACIENTES SOMETIDOS A UN -  
FARMACO, 250  
MENDEL, 3  
MODA, 199  
MODELO  
aleatorio, 6  
determinista, 6  
MOMENTOS  
centrales, 169  
centrales de la distribución con-  
junta de  $n$  variables aleatorias,  
360  
centrales mixtos de orden  $i, k$ , 172  
de orden  $r$ , 168  
de orden  $r$  respecto al punto  $C$ , 169,  
199  
Generación de, 180  
mixtos de orden  $i, k$ , 171  
MORFISMO  
de álgebras, 26  
de espacios de probabilidad, 27  
MOSIMAN, 71  
MULTINOMIAL  
Distribución, 226

**N**

NAGELI, 9  
NEI, 253  
NORMA DE UNA VARIABLE ALEATORIA, 336  
NORMAL  
bivariante, 384  
función de densidad, 275  
función de distribución, 276  
reducida, 276, 278  
tipificada, 276

**O**

OBSERVABILIDAD, 9  
OBSERVABLE  
Suceso, 8  
OBSERVACION  
Nivel de, 8  
ORTOGONAL  
Regresión, 321

**P**

PAPEL DE PROBABILIDAD, 311  
 PARAMETRICOS  
   Procedimientos, 292  
 PARTICION  
   finita, 23  
   propia, 23  
 PARTICIONES  
   Producto exterior de, 56  
 PASCAL (O GEOMETRICA)  
   Distribución de, 230  
 PEARSON  
   Sistema de, 396  
 PLATICURTICAS  
   Distribuciones, 204  
 POINCARÉ, 292  
 POISSON  
   Binomial compuesta con una,  
   261  
   Compuesta con la Gamma, 262  
   Distribución, 253  
   Relación con la exponencial, 259  
   Relación con la Gamma, 260  
 POLIHIPERGEOMETRICA  
   Distribución, 230  
 POSICION  
   Medidas de, 196  
   Valor medio, 196  
 PRINCIPIO DE LAS PROBABILIDADES COM-  
   PUESTAS, 50  
 PRODUCTO  
   Regla del, 50  
 PROBABILIDAD,  
   condicionada, 45, 46, 48  
   Definición, 13  
   Definición clásica, 2, 17  
   Espacio de, 16  
   Estimación de la, 17, 42  
   Función de densidad de, 95, 98  
   Función de distribución de, 95  
   Historia de la Teoría, 1  
   inducida, 76, 88  
 PROBABILIDADES COMPUESTAS  
   Principio de, 50  
 PROBABILIDADES TOTALES  
   Teorema de, 53  
 PROBABILISTICO,  
   Arbol, 61  
 PRODUCTO,  
   escalar entre variables aleato-  
   rias, 335  
   exterior de álgebras, 56  
   exterior de particiones, 56  
   cartesiano de álgebras, 55  
   cartesiano de espacios de proba-  
   bilidad, 55

Espacio de probabilidad, 59  
 Regla del, 50  
 PROYECCION DE LA DISTRIBUCION CON-  
   JUNTA DE  $(X, Y)$ , 116

**R**

RAZ CUADRADA  
   Transformación 294  
 RAO, 295  
 RAZON DE CORRELACION, 333  
 RECORRIDO, 201  
   intercuartil, 202  
 REDUCIDA (ver normal)  
 REGLA DEL PRODUCTO, 50  
 REGRESION  
   hiperbólica, 329  
   lineal  
     coeficiente de, 317  
     recta de, 317  
   lineal múltiple,  
     hiperplano de, 363  
     coeficientes de, 363  
   ortogonal, 321  
   polinomial, 329  
 REGRESION DE LA MEDIA  
   curva de, 332  
 RENYI, 187  
 REPETICIONES DE UNA EXPERIENCIA, 350  
   Distribución binomial, 219  
   Hasta que se presenta un suceso,  
   231  
 RESIDUAL  
   Varianza, 336  
 RESIDUO, 366  
 RIESGO, 194  
 ROHLF, 295

**S**

SCHWARZ  
   desigualdad de, 173  
 SIGMA-ALGEBRA ( $\sigma$ -álgebra), 25  
   generación de, 26  
 SIMPSON  
   Distribución de, 283  
 SISTEMA DE PEARSON, 396  
 SLUTSKY  
   Convergencia estocástica de, 186  
 SOKAL, 295  
 STONE,  
   Teorema de, 11  
 SUCESO, 10  
   imposible, 12  
   observable, 8  
   seguro, 10

SUCESOS ELEMENTALES  
( $\Omega$ ) conjunto de, 8

SUMA  
de variables aleatorias con  
distribución normal, 277

### T

t DE STUDENT  
distribución, 392

TABLAS MANEJO DE,  
F de Fisher, 395  
ji-cuadrado, 391  
normal, 278  
t de student, 392

TAMAÑO DE UN ORGANO, 288

TCHEBYCHEFF,  
teorema de, 157

TENDENCIA GENETICA, 248

TERNAS  
de sucesos independientes, 51,  
62

TIEMPO TRANSCURRIDO,  
hasta la presencia de un acon  
tecimiento, 235  
entre dos apariciones sucesivas  
de un suceso, 239

TIPIFICADA (ver normal)

TOLERANCIA, 194

TRANSFORMACIONES NORMALIZANTES, 293

TRIANGULAR  
distribución, 283

### U

UNICIDAD  
de funciones de distribución y  
funciones características, 181

UNIFORME  
convolución de, 282  
distribución, 232

### V

VALOR MEDIO, 149  
VARIABLE ALEATORIA, 76

centrada, 154  
continua 97  
compleja, 177  
discreta, 95  
tipificada, 154, 201

VARIABLES ALEATORIAS  
cambio de, 132  
conjuntas, 110  
espacio vectorial de, 83

incorrelacionadas, 176  
independencia estocástica de, 120

VARIANZA, 154

VARIANZAS-COVARIANZAS (coy-var)  
matriz de, 361

VARIANZA RESIDUAL, 366

VENN, 4

VIDA  
de los individuos de una pobla-  
ción, tiempo de, 104, 164

VONN MISES, 5

### Y

YULE, 263

